ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

NGÔ THỊ VÂN ANH

DÃY DIATOMIC CỦA STERN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN, 10/2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

NGÔ THỊ VÂN ANH

DÃY DIATOMIC CỦA STERN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: **Phương pháp toán sơ cấp**
Mã số: **8460113**

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
(Xác nhận)

PGS. TS. Nông Quốc Chinh

THÁI NGUYÊN, 11/2018

Mục lục

Bảng ký hiệu

$\mathbb{N}$	Tập hợp các số tự nhiên
$\mathbb{Z}$	Tập hợp các số nguyên
$\mathbb{Z}^+$	Tập hợp các số nguyên dương
$\mathbb{Q}$	Tập hợp các số hữu tỉ
$\mathbb{Q}^+$	Tập hợp các số hữu tỉ dương

Mở đầu

Năm 1858 Moritz Abraham Stern (M.A. Stern) đã đưa ra định nghĩa mảng diatomic (trong bài báo *"Ueber eine zahlentheoretische Funktion"*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 55:193–220), đây là một khái niệm toán học có nhiều tính chất hay tương tự tam giác Pascal, từ mảng diatomic, Stern đã xây dựng nên dãy diatomic, trong đó có chứa các phần tử của dãy Fibonacci...

Mục tiêu của luận văn là trình bày những vấn đề cơ bản của mảng diatomic và dãy diatomic của Stern, nghiên cứu một số tính chất của nó và đưa ra một vài ứng dụng của dãy Stern trên cơ sở nội dung của hai tài liệu là: [1] Sam Northshield (2010), *"Stern's Diatomic sequence* 0, 1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 4,...", Amer. Math. Monthly, 177, pp. 581–598; và [2] Bruce Reznick (2008), *"Regularity Properties of the Stern Enumeration of the rationals"*, Journal of Integer Sequence, Vol.11.

Ngoài phần mở đầu và kết luận nội dung chính của luận văn được trình bày trong 3 chương.

Chương 1: Mảng diatomic và dãy diatomic của Stern. Chương này trình bày một số kiến thức cơ bản về ước số, "thuật toán Euclid" và "thuật toán Euclid chậm" để tìm ước chung lớn nhất của hai số nguyên dương; dãy fibonacci; dãy Jacobsthal; khái niệm và một số nhận xét, tính chất của mảng diatomic và dãy diatomic của Stern.

Chương 2: Các tính chất của dãy diatomic và mảng diatomic của Stern. Chương này trình bày cách biểu diễn siêu nhị phân của một số nguyên, so sánh với tam giác Pascal và mô tả các tập số hữu tỉ qua dãy Stern.

Chương 3: Ứng dụng của dãy diatomic và mảng diatomic của

Stern. Chương này trình bày một số ứng dụng của mảng diatomic và dãy diatomic của Stern.

Trong suốt quá trình làm luận văn, tôi luôn nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ của PGS.TS. Nông Quốc Chinh. Thầy đã giành nhiều thời gian chỉ bảo tận tình, hướng dẫn và giải đáp các thắc mắc của tôi. Tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến Thầy.

Tôi xin gửi lời cảm ơn tới các quý thầy, cô khoa Toán - Tin và phòng Đào tạo của trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, cũng như các thầy, cô tham gia giảng dạy khóa cao học 2016-2018 đã tận tình chỉ bảo, truyền đạt kiến thức trong suốt thời gian theo học, thực hiện và hoàn thành luận văn.

Cuối cùng, tôi xin gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn bè đã luôn động viên giúp đỡ, là chỗ dựa vững chắc về vật chất và tinh thần cho tôi trong suốt quá trình học tập và hoàn thiện luận văn Thạc sĩ.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng, nhưng luận văn vẫn còn một số hạn chế nhất định. Kính mong thầy cô và các bạn góp ý để tác giả tiếp tục hoàn thiện luận văn này.

Thái Nguyên, tháng 10 năm 2018

Người viết luận văn

Ngô Thị Vân Anh

Chương 1

Mảng diatomic và dãy diatomic của Stern

1.1 Các kiến thức chuẩn bị

1.1.1 Một số định nghĩa

Định nghĩa 1.1.1. Cho $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$. Ta nói a chia hết cho b, hoặc a là bội của b, hoặc b là ước của a khi và chỉ khi tồn tại số nguyên q sao cho $a = b.q$.

Khi đó ta viết: $b \mid a$ hay $a \vdots b$ để chỉ rằng a chia hết cho b.

Số nguyên dương c lớn nhất là ước của cả hai số nguyên a, b được gọi là *ước số chung lớn nhất* (ƯCLN) của a và b.

Ký hiệu ước chung lớn nhất của a và b là: $\gcd(a, b)$ hay (a, b).

Chú ý: Trong trường hợp cả hai số nguyên a và b đều bằng 0 thì chúng không có ƯCLN vì khi đó mọi số tự nhiên khác không đều là ước chung của a và b. Nếu chỉ một trong hai số a hoặc b bằng 0, số kia khác 0 thì ƯCLN của chúng bằng giá trị tuyệt đối của số khác 0.

Ví dụ 1.1.2. $(12, 36) = 12; (5, 0) = 5$.

Hai số nguyên a và b được gọi là *nguyên tố cùng nhau* nếu ước chung lớn nhất của chúng bằng 1. Ta viết: $(a, b) = 1$.

Ví dụ 1.1.3. $(9, 58) = 1$ nên 9 và 58 là nguyên tố cùng nhau.

Định nghĩa 1.1.4. Cho hai số dương: a là số bị chia và b là số chia, a modulo b kí hiệu là a mod b là số dư của phép chia của a cho b.

Ví dụ 1.1.5. "8 mod 3" bằng 2 vì 8 chia cho 3 có thương số là 2 và số dư là 2.

Định nghĩa 1.1.6. Cho hai số nguyên dương a, b (với $a > b$). *Thuật toán Euclid* để tìm ước chung lớn nhất của hai số nguyên dương a, b được thực hiện như sau.
Bước 1: Chia a cho b được q_0 và dư r_1 nghĩa là $a = q_0 b + r_1, 0 \leqslant r_1 < b$.
Nếu $r_1 = 0$ thì dừng lại.
Nếu $r_1 \neq 0$ thì tiếp tục thực hiện bước 2.
Bước 2: Chia b cho r_1 được q_1 và dư r_2 nghĩa là $b = q_1 r_1 + r_2, 0 \leqslant r_2 < r_1$.
Nếu $r_2 = 0$ thì dừng lại.
Nếu $r_2 \neq 0$ thì tiếp tục thực hiện bước 3.
...
Bước k: Chia r_{k-2} cho r_{k-1} được q_{k-1} và dư r_k nghĩa là $r_{k-2} = q_{k-1} r_{k-1} + r_k, 0 \leqslant r_k < r_{k-1}$.
...
Bước m $(m > k)$: Chia r_{m-2} cho r_{m-1} được q_{m-1} nghĩa là $r_{m-2} = q_{m-1} r_{m-1}$.

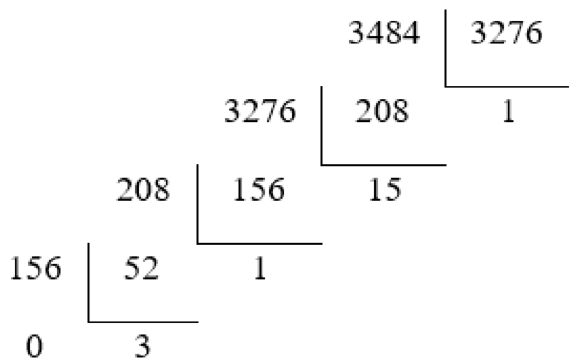
Sau mỗi bước các số dư đều thực sự giảm nên đến bước thứ m nào đó, quá trình sẽ dừng lại khi phép chia đó có số dư bằng 0.

Ta có: $(a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = \ldots = (r_{k-1}, r_{k-2}) = \ldots = r_{m-1}$.

Do đó: $(a, b) = r_{m-1}$

Ví dụ 1.1.7. Áp dụng thuật toán Euclid để tìm $(3484, 3276)$.

Ta có



Vậy $(3484, 3276) = (3276, 208) = (208, 156) = (156, 52) = 52$.

Định nghĩa 1.1.8. Cho hai số nguyên dương a, b. *Thuật toán Euclid chậm* để tìm ước chung lớn nhất của hai số nguyên dương a, b được thực hiện như sau: trừ số lớn cho số nhỏ hơn ta được cặp số mới là kết quả phép trừ và số nhỏ, lặp lại và dừng khi hai số trong cặp bằng nhau.

Ta nhận thấy rằng, sau mỗi bước, ước chung lớn nhất của hai số a và b là không đổi. Thật vậy, giả sử a và b là hai số nguyên dương $(a > b)$, k là ước chung lớn nhất của a và b thì $a = a_1k, b = b_1k$. Khi đó, $a - b = (a_1 - b_1)k$, ở đây a_1, b_1 là hai số nguyên tố cùng nhau, từ đây suy ra ước chung lớn nhất của b và $a - b$ cũng là k. Vì tập số tự nhiên bị chặn dưới bởi số 0, nên thuật toán này sẽ kết thúc sau một số hữu hạn bước và vì ước chung lớn nhất được giữ nguyên ở mỗi bước, nên thuật toán phải kết thúc tại $[k, k]$, ở đó $k = (a, b)$.

Giả sử có cặp $[a, b], b > a$, ta ký hiệu thuật toán Euclid chậm là *SEA*, và viết: $[a, b] \xrightarrow{SEA} [a, b - a]$.

Ví dụ 1.1.9. Áp dụng thuật toán Euclid chậm để tìm $(4, 7)$ và $(16, 28)$.

$$[4, 7] \mapsto [4, 3] \mapsto [1, 3] \mapsto [1, 2] \mapsto [1, 1].$$

Vậy $(4, 7) = 1$.

$$[16, 28] \mapsto [12, 16] \mapsto [4, 12] \mapsto [4, 8] \mapsto [4, 4].$$

Vậy $(16, 28) = 4$.

1.1.2 Dãy Fibonacci

Định nghĩa 1.1.10. Dãy số Fibonacci, ký hiệu (F_n), được định nghĩa bởi công thức truy hồi như sau:

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad (n \geqslant 1). \end{cases}$$

Theo định nghĩa ta có dãy Fibonaci:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

Số hạng tổng quát của dãy Fibonacci được xác định bởi công thức Binet:

$$F_n = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n\sqrt{5}} = \frac{\phi^n - \overline{\phi}^n}{\phi - \overline{\phi}} \tag{1.1}$$

trong đó $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ và $\overline{\phi} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Một vài tính chất của dãy Fibonaci:

Tính chất 1.1.11. Với số nguyên dương n bất kỳ ta có:$(F_n, F_{n+1}) = 1$.

Tính chất 1.1.12. Với hai số nguyên dương m, n bất kỳ, nếu $n \mid m$ thì $F_n \mid F_m$.

Mệnh đề 1.1.13. *Với hai số nguyên dương m, n bất kỳ ta có đẳng thức:*

$$F_{m+n} = F_{m-1}.F_{n+1} + F_m.F_n. \tag{1.2}$$

Chứng minh. Qui nạp theo n, với $n = 1$ đúng.
Giả sử (1.2) đúng với $n = k$ tức là $F_{m+k} = F_{m-1}.F_{k+1} + F_m.F_k$, ta chứng minh:

$$F_{m+k+1} = F_{m-1}.F_{k+2} + F_m.F_{k+1}.$$

Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} F_{m+k+1} &= F_{m+k-1} + F_{m+k} \\ &= F_{m-1}.F_k + F_m.F_{k-1} + F_{m-1}.F_{k+1} + F_m.F_k \\ &= F_{m-1}.\left(F_k + F_{k+1}\right) + F_m.\left(F_{k-1} + F_k\right) \\ &= F_{m-1}.F_{k+2} + F_m.F_{k+1}. \end{aligned}$$

Vậy theo nguyên lí qui nạp ta có điều phải chứng minh. □

Cho $m = kn$ thì ta suy ra thêm được một số tính chất sau:

Tính chất 1.1.14. Nếu F_n chia hết cho F_m thì n chia hết cho m $(m > 2)$.

Tính chất 1.1.15. Với hai số nguyên dương m, n bất kỳ ta có:

$$(F_m, F_n) = F_{(m,n)}.$$

Tính chất 1.1.16. $n \geqslant 5$ và F_n là số nguyên tố thì n cũng là số nguyên tố.